Nombres de Bell

Proposition 1 (Nombres de Bell). *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ avec la convention $B_0 = 1$, alors :*

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ B_k = \frac{1}{e}\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^k}{n}$$

Démonstration.

On commence par montrer la relation de récurrence suivante sur les nombres de Bell :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

Soit en effet $n \in \mathbb{N}$, on note, pour $k \leqslant n$, E_k l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ telles que la partie contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Il existe $\binom{n}{k}$ parties de $[\![1,n+1]\!]$ de cardinal $k+1$ contenant $n+1$, et il existe B_{n-k} partitions des $n-k$ entiers restants. Il existe donc $\binom{n}{k}B_{n-k}$ telles partitions. Comme les ensembles E_k forment une partition de l'ensemble des paritions de $[\![1,n+1]\!]$, on a alors :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}|E_k| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

À présent, penchons nous sur la série entière $\sum \frac{B_n}{n!}z^n$, dont nous notons f la somme.
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $B_n \leqslant n!$. Le cas $n=0$ est immédiat, ensuite on a :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!} \leqslant n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!} \leqslant n!\frac{n}{n!} \leqslant n!$$

La suite $\frac{B_n}{n!}$ est donc bornée, et la série entière considérée a un rayon de convergence $R > 1$.
Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(n-1)!}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{B_k}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}z^k\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}$$

On reconnaît alors un produit de Cauchy de deux séries entières :

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right) = f(z)e^z$$

Ainsi, f est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= e^z y \\ y(0) &= f(0) = 1 \end{cases}$$

On en déduit que $f(z) = \frac{1}{e}e^{e^z} = e^{e^z-1}$. Or, on a :

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nz)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nz)^k}{n!k!}$$

On cherche à appliquer le théorème de Fubini sur cette double somme, pour cela, on montre la sommabilité de la double suite $\frac{(nz)^k}{n!k!}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(nz)^k}{n!k!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|nz|^k}{n!k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|nz|^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{|z|})^n}{n!} = e^{e^{|z|}} < +\infty$$

D'où, par le théorème de Fubini :

$$f(z) = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nz)^k}{n!k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(nz)^k}{n!k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}\right)z^k$$

On obtient alors, par unicité du prolongement analytique :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ B_k = \frac{1}{e}\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^k}{n}$$

□

Conclusion. Le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ s'écrit $B_k = \frac{1}{e}\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^k}{n}$. ◁

Références

[FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 1.* Cassini